Kleine Transversalschwingungen einer an zwei Punkten aufgehängten Kette

Dizioglu, Bekir

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 26, 1976, S.135-142

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Kleine Transversalschwingungen einer an zwei Punkten aufgehängten Kette

Von *Bekir Dizioğlu*

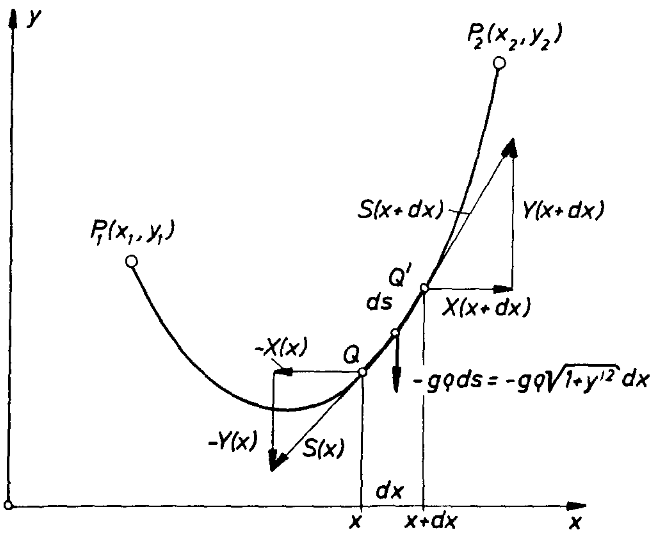

Bild 1

Es sei (siehe Bild 1) S = S (x) die Spannung in der Kette mit den Komponenten X (x) und Y (x), ρ die konstante Dichte (gcm^{-1}) der Kette, g die Erdbeschleunigung. Dann ergibt die Gleichgewichtsbedingung für das Linienelement QQ'

$$X(x + dx) - X(x) = 0, \quad Y(x + dx) - Y(x) - g\rho\, ds = 0,$$

wozu noch, wenn y = y (x) die Gleichung der Kettenlinie ist, $y'(x) = \frac{Y(x)}{X(x)}$ tritt.

Es folgt sofort X = const. = H und daraufhin wegen Y = Hy' die Differentialgleichung der Kettenlinie $Hy'' - g\rho\sqrt{1 + y'^2} = 0$, die auch in folgender Form mit $H = ag\rho$ geschrieben werden kann: $\frac{y'\,y''}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{y'}{a}$, woraus durch Integration folgt:

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{y - c}{a}$$

oder

$$dx = \frac{d(y-c)}{\sqrt{(y-c)^2 - a^2}}$$

oder

$$x - b = a \operatorname{arcosh} \frac{y-c}{a}, \qquad \text{d. h.} \qquad y = a \cosh \frac{x-b}{a} + c.$$

Die drei Integrationskonstanten bestimmen sich, wenn $l > \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ die Länge der Kette ist, aus den drei Gleichungen $y_{1,2} = a \cosh \frac{x_{1,2} - b}{a} + c$ und

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = a \left(\sinh \frac{x_2 - b}{a} - \sinh \frac{x_1 - b}{a} \right),$$

aus denen wegen

$$y_2 - y_1 = a \left(\cosh \frac{x_2 - b}{a} - \cosh \frac{x_1 - b}{a} \right)$$

durch Quadrieren und Substrahieren sofort folgt:

$$\frac{1}{a^2} [l^2 - (y_2 - y_1)^2] = -2 + 2 \left(\cosh \frac{x_2 - b}{a} \cosh \frac{x_1 - b}{a} - \sinh \frac{x_2 - b}{a} \sinh \frac{x_1 - b}{a} \right)$$
$$= 2 \cosh \frac{x_2 - x_1}{a} - 1 = 4 \sinh^2 \frac{x_2 - x_1}{2a}$$

oder, wenn wie oben $x_2 - x_1 > O$, $\frac{1}{2a} \sqrt{l^2 - (y_2 - y_1)^2} = \sinh \frac{x_2 - x_1}{2a}$.

Diese transzendente Gleichung hat wegen $l^2 - (y_2 - y_1)^2 > (x_2 - x_1)^2$ gewiß eine, aber auch nur eine positiv reelle Wurzel a (siehe Bild 2), mit deren Hilfe sich dann b und c und schließlich auch H leicht bestimmen lassen. Wir wollen der Einfachheit halber a, b, c, x_1 und x_2 als gegeben betrachten, woraus dann umgekehrt die Werte y_1, y_2, l und H sofort in einfachster Weise folgen. Es ergibt sich dann für die Spannung S (x) sofort

$$S(x) = \sqrt{X^2 + Y^2} = H \sqrt{1 + y'^2} = H \cosh \frac{x-b}{a} = a g \rho \cosh \frac{x-b}{a}.$$

Wir unterwerfen nun diese Kette einer sehr kleinen Deformation bei der bis auf sehr kleine Größen ihre einzelnen Elemente auf einer Zylinderfläche verschoben werden, deren Basiskurve die Kettenlinie ist, und deren geradlinige Erzeugende auf der xy-Ebene senkrecht stehen. Etwas genauer können wir auch so sagen: Wir betrachten nur in dem Sinne quasistatische Deformationen der Kette, bei denen deren Orthogonalprojektion auf die xy-Ebene stets eine durch P_1 und P_2 gehende Kettenlinie ist, und zwar auch dann, wenn die Verrückung w (x, t) jedes Elements senkrecht zur xy-Ebene sich mit der Zeit ändert. Es ist klar, daß die Variationen der zugehörigen a, b, c bei kleinen Verrückungen so gering sind, daß man unbedenklich a, b, c als konstant ansehen kann. Außerdem kann man, wie man es auch in der Theorie der Saitenschwingungen getan hat, die oben ermittelten Werte für die

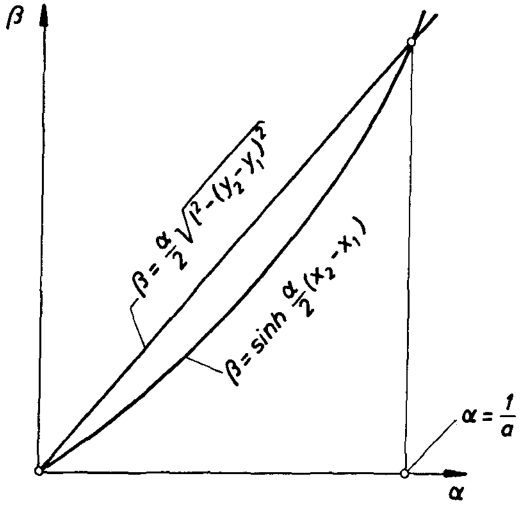

Bild 2

Spannung S (x) und ihre Horizontalkomponente H in erster Näherung auch für die transversal schwingende Kette beibehalten. Unter diesen Voraussetzungen betrachten wir nun auf der Raumkurve, in welche die Kettenlinie nach der Deformation übergeht, jene Punkte, deren Projektionen Q und Q′ sind, und in denen die Tangenten mit der xy-Ebene die sehr kleinen Winkel γ und γ' mit der xy-Ebene bilden. Die Komponenten parallel zur xy-Ebene der in Q und Q′ an dem Element QQ′ angreifenden Spannungen sind dann

$$S(x) \cos \gamma \approx S(x) \left(1 - \frac{\gamma^2}{2}\right), \qquad S(x+dx) \cos \gamma' \approx S(x+dx) \left(1 - \frac{\gamma'^2}{2}\right),$$

also bis auf Größen zweiter Ordnung gleich S (x) bzw. S (x + dx) und der Kontigenzwinkel zwischen diesen beiden Komponenten ist gerade so beschaffen, daß ihre Resultierende der auf das Element QQ′ wirkenden Schwerkraft das Gleichgewicht hält. Um die Schwerkraft brauchen wir uns also nicht mehr zu kümmern. Anders verhält es sich mit der Rückstellkraft

$$- S(x) \sin \gamma + S(x + dx) \sin \gamma' \approx - S(x) \tan \gamma + S(x + dx) \tan \gamma',$$

die durch die D'Alembertsche Trägheitskraft kompensiert werden muß. Bedeutet $\frac{\partial}{\partial s}$ eine Differentiation längs der Kettenlinie, so ist ja $\tan \gamma = \left[\frac{\partial w}{\partial s}\right]_x = \left[\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{ds}\right]_x$ und entsprechend $\tan \gamma' = \left[\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{ds}\right]_{x+dx}$, also bis auf Größen dritter Ordnung die gesuchte Rückstellkraft gleich $-\left[S\frac{dx}{ds}\frac{\partial w}{\partial x}\right]_x + \left[S\frac{dx}{ds}\frac{\partial w}{\partial x}\right]_{x+dx}$. Hierin ist aber $S\frac{dx}{ds} = H = ag\rho$ die längst der ganzen Kettenlinie konstante Horizontalkomponente der Spannung. Also erhalten wir für die Rückstellkraft bis auf Größen zweiter Ordnung in dx: $ag\rho\left[-\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_x+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x+dx}\right]=ag\rho\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,dx$. Da die Trägheitskraft gleich $\rho\,ds\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\rho\cosh\frac{x-b}{a}\,dx\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ ist, ergibt sich schließlich nach Herausheben von ρ für die Transversalschwingungen der an zwei Punkten befestigten schweren Kette in der üblichen Näherung der Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{ag}{\cosh\frac{x-b}{a}}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,.$$

Zu dieser treten noch die Randbedingungen $w(x_1, t) = w(x_2, t) = O$ und die üblichen Anfangsbedingungen, daß $w(x, O)$ und $\frac{\partial w}{\partial t}(x, O)$ vorgeschrieben sind. Bemerkenswert ist, daß genau wie beim mathematischen Pendel die Dichte der Kette nicht in die Bewegungsgleichung eingeht, sondern neben den lediglich durch die geometrische Konfiguration bestimmten Konstanten a, b, c — entsprechend der Länge beim Pendel — nur die Erdbeschleunigung g. Diese Unabhängigkeit von der Dichte in beiden Fällen ist natürlich eine unmittelbare Folge der verwendeten Hypothese: Schwere Masse = träge Masse.

Man sieht sofort, daß die Integration der Bewegungsgleichung auf Mathieusche Funktionen führt. Um zu der üblichen Normierung zu gelangen (vgl. z. B. Whittacker-Watson, A Course of Modern Analysis, Amer. Edition 1945, p. 405), setzen wir etwa $\frac{x-b}{a}=2\,\xi$, so daß $\frac{\partial}{\partial x}=\frac{1}{2a}\,\frac{\partial}{\partial\xi}$ wird und damit die Bewegungsgleichung übergeht in

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{g}{4\,a\cosh 2\,\xi}\,\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}\,.$$

(In der allgemeinen Theorie wurde *nicht* $\frac{x-b}{a}=2\,\xi$ sondern $\frac{x-b}{a}=\xi$ gesetzt, wie es für dieses Problem das Natürliche ist.) Mit den Randbedingungen $w(\xi_1, t) = w(\xi_2, t) = O$, wobei $\xi_{1,2}=\frac{x_{1,2}-b}{a}$ ist. Wenn man will, kann man hierin um mit trigonometrischen Funktionen zu arbeiten, ξ durch $i\,\xi$ ersetzen, doch scheint das in diesem Fall nicht geraten. Der übliche Ansatz $w = \Xi(\xi)\,T(t)$ führt zu

$$\frac{T''}{T}=\frac{g}{4\,a\cosh 2\,\xi}\,\frac{\Xi''}{\Xi}=-\mu^2\quad\text{oder}\quad\Xi''+\frac{4\,a\,\mu^2}{g}\cosh 2\,\xi\,\Xi=O,$$

und die Eigenwerte μ_n ergeben sich aus den Randbedingungen $\Xi(\xi_1) = \Xi(\xi_2) = O$. Sind die zugehörigen Eigenfunktionen $X_n(\xi)$, so lautet die gesuchte Lösung

$$w(\xi, t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(\xi)\,[A_n\cos\mu_n t+B_n\sin\mu_n t]\,.$$

Die Orthogonalität der Eigenfunktion $\int_{\xi_1}^{\xi_2}\cosh 2\,\xi\,X_m(\xi)\,X_n(\xi)\,d\xi=O$ für $m \neq n$, der Entwicklungssatz usw. sind aus der Sturm-Liouvilleschen Theorie bekannt. Sie gestatten mühelos die Anpassung von w (x, t) an die Anfangsbedingungen.

Um zu zeigen, daß man von der hier entwickelten Theorie aus ebenso mühelos den Anschluß an Bekanntes, nämlich die Schwingungen eines schweren, frei herabhängenden, am oberen Endpunkt befestigten Seiles (Daniel Bernoulli, Euler) gewinnen kann, betrachten wir eine an zwei Punkten fixierte Kette, deren Scheitel

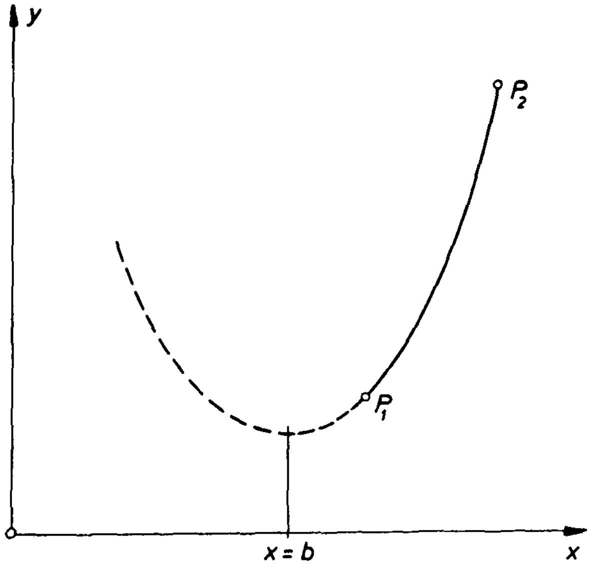

Bild 3

(Minimum) weit außerhalb der Kette liegt, so daß also die Kette zwischen P_1 und P_2 nahezu vertikal verläuft (siehe Bild 3). Längs eines solchen Bogens darf man näherungsweise unbedenklich, wenn, wie in Bild 3, $\frac{x-b}{a} > 0$ ist,

$$\frac{y-c}{a} = \cosh\frac{x-b}{a} \approx \frac{1}{2}\, e^{\frac{x-b}{a}} \qquad \text{oder auch} \qquad \frac{x-b}{a} \approx \ln\frac{2\,(y-c)}{a}$$

setzen. Führt man nach diesen Vernachlässigungen y an Stelle von x als unabhängige Veränderliche ein, so geht die Bewegungsgleichung wegen

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{dy}{dx}\,\frac{\partial}{\partial y} = \frac{y-c}{a}\,\frac{\partial}{\partial y}$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{y-c}{a}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y-c}{a}\,\frac{\partial}{\partial y}\right) = \left(\frac{y-c}{a}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{y-c}{a^2}\,\frac{\partial}{\partial y}$$

über in

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = g\left[(y-c)\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y}\right] = g\,\frac{\partial}{\partial y}\left[(y-c)\,\frac{\partial w}{\partial y}\right],$$

eine Gleichung, die wegen der Belanglosigkeit von c, das durch eine einfache Koordinatentransformation sofort zum Verschwinden gebracht werden kann, wie die des schwingenden Seiles nur mehr von g abhängt. Setzen wir nun noch

$\eta = 2 \sqrt{\frac{y-c}{g}} > O$, was wegen $y - c = \frac{1}{2a} \cosh(ax + b)$ ohne Verlassen des Reellen möglich ist, und dementsprechend $\eta_{1,2} = 2 \sqrt{\frac{y_{1,2} - c}{g}}$, so ist wegen

$$y - c = \frac{g}{4} \eta^2, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{dy} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{2}{g\eta} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

und

$$(y - c) \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\eta}{2} \frac{\partial}{\partial \eta},$$

also

$$g \frac{\partial}{\partial y} \left[(y - c) \frac{\partial w}{\partial y} \right] = \frac{2}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta}{2} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial w}{\partial \eta}.$$

Die Bewegungsgleichung lautet daher nunmehr

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial w}{\partial \eta},$$

und der Ansatz $w = H(\eta)\, T(t)$ führt zu $\frac{T''}{T} = \frac{1}{H} \left(H'' + \frac{1}{\eta} H' \right) = -\mu^2$, d. h. zu $\eta^2 H'' + \eta H' + \mu^2 \eta^2 H = O$ mit der Lösung

$$H = c_1 J_0(\mu\eta) + c_2 N_0(\mu\eta)$$

also zu der Eigenwertgleichung

$$J_0(\mu\eta_1) N_0(\mu\eta_2) - J_0(\mu\eta_2) N_0(\mu\eta_1) = O$$

mit den einfachen positiv-reellen Eigenwerten μ_n und den zugehörigen Eigenfunktionen

$$X_n(\eta) = J_0(\mu_n\eta) N_0(\mu_n\eta_1) - N_0(\mu_n\eta) J_0(\mu_n\eta_1)$$

mit der Orthogonalitätsrelation

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \eta X_m(\eta) X_n(\eta)\, d\eta = O \text{ für } m \neq n.$$

Auch hier ist der Entwicklungssatz unmittelbar der Sturm-Liouvilleschen Theorie zu entnehmen und gestattet den Anschluß der allgemeinen Lösung

$$w(\eta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\eta) \left[A_n \cos \mu_n t + B_n \sin \mu_n t \right]$$

an die Anfangsbedingungen.

Bei den geänderten Randbedingungen

$$w(x_1, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^{(1)} \cos n\,\omega_1\,t + B_n^{(1)} \sin n\,\omega_1\,t]$$

und $w(x_2, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^{(2)} \cos n\,\omega_2\,t + B_n^{(2)} \sin n\,\omega_2\,t]$ und den Anfangsbedingungen" $w(x, O)$ und $\frac{\partial w}{\partial t}(x, O)$ gegeben" geht man im Falle, daß keine Resonanz vorliegt (kein ganzzahliges Vielfaches von ω_1 und ω_2 gleich einem Eigenwert λ_n) so vor:

Wir setzen $w_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n^{(1)}(x)\,[\alpha_n^{(1)} \cos n\,\omega_1\,t + \beta_n^{(1)} \sin n\,\omega_1\,t]$ und dies in die Bewegungsgleichung $\cosh\frac{x-b}{a}\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\,g\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ein, und das ergibt für $X_n^{(1)} = O$ die Differentialgleichungen $X_n^{(1)''} + a g n^2 \omega_1^2 \cosh\frac{x-b}{a} X_n^{(1)} = O$ mit den zugehörigen, bis auf einen willkürlichen Faktor bestimmten Lösungen $X_n^{(1)}(x)$, die der Randbedingung $X_n^{(1)}(x_2) = O$ genügen (immer natürlich $n = 1, 2, \ldots$). Dann ist gewiß $X_n^{(1)}(x_1) \neq O$, da kein $n\omega_1$ Eigenwert sein soll. Hiernach ist dann also

$$w_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^{(1)}(x)}{X_n^{(1)}(x_1)} [A_n^{(1)} \cos n\,\omega_1\,t + B_n^{(1)} \sin n\,\omega_1\,t]$$

jene Lösung der Bewegungsgleichung mit der zeitlichen Periode $\frac{2\pi}{\omega_1}$, die den Randbedingungen

$$w_1(x_1, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^{(1)} \cos n\,\omega_1\,t + B_n^{(1)} \sin n\,\omega_1\,t]$$

und $w_1(x_2, t) = O$ genügt. Sind andererseits die Funktionen $X_n^{(2)}(x)$ jene Lösungen von

$$X_n^{(2)''} + a\,g\,n^2\,\omega_2^2 \cosh\frac{x-b}{a}\,X_n^{(2)} = O,$$

die der Randbedingung $X_n^{(2)}(x_1) = O$ genügen, so daß also $X_n^{(2)}(x_2) \neq O$ ist, so ist

$$w_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^{(2)}(x)}{X_n^{(2)}(x_2)} [A_n^{(2)} \cos n\,\omega_2\,t + B_n^{(2)} \sin n\,\omega_2\,t]$$

jene Lösung der zeitlichen Periode $\frac{2\pi}{\omega_2}$ und den Randbedingungen

$$w_2(x_1, t) = O, \qquad w_2(x_2, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^{(2)} \cos n\,\omega_2\,t + B_n^{(2)} \sin n\,\omega_2\,t].$$

Hierzu fügen wir noch die Lösung mit den Randbedingungen

$$w_3(x_1, t) = w_3(x_2, t) = O,$$

also

$$w_3(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)\,[A_n^{(3)} \cos\lambda_n t + B_n^{(3)} \sin\lambda_n t]$$

und erhalten so die an die Anfangsbedingungen anpassungsfähige Lösung

$$w(x, t) = w_1(x, t) + w_2(x, t) + w_3(x, t),$$

die den eingangs geforderten Bedingungen genügt. Die Koeffizienten $A_n^{(3)}$ und $B_n^{(3)}$ bestimmen sich dadurch, daß

$$w_3(x, O) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(3)} \varphi_n(x) = w(x, O) - w_1(x, O) - w_2(x, O),$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, O) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n B_n^{(3)} \varphi_n(x) = \frac{\partial w}{\partial t}(x, O) - \frac{\partial w_1}{\partial t}(x, O) - \frac{\partial w_2}{\partial t}(x, O)$$

vorgegebene Funktionen von x sind. Sind die $A_n^{(3)}$ und $B_n^{(3)}$ so bestimmt, so kann jetzt auch der Resonanzfall glatt erledigt werden. Nähert sich nämlich ein Vielfaches von ω_1 oder ω_2 einem Eigenwert, so bieten sich die Resonanzterme in der Form $\frac{0}{0}$ dar und können durch Grenzübergang bestimmt werden.

Im Falle, daß y als unabhängige Veränderliche gewählt wird, geht man entsprechend vor.